Eine Menge ist definiert durch ihre Elemente.

<u>2.1 Def.:</u> Zwei Mengen M, N sind <u>gleich</u> ($M = N$), wenn sie dieselben Elemente haben, wenn also gilt:

$$x \in M \Leftrightarrow x \in N$$

<u>2.1 Def.:</u> Eine Menge M ist <u>Teilmenge</u> einer Menge N ($M \subset N$), wenn gilt

$$x \in M \Rightarrow x \in N$$

<u>Notiz</u> Es ist $M = N$ genau dann, wenn $M \subset N$ und $M \supset N$.

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen

$\cap$

$\mathbb{Z} := \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ ganze Zahlen

$\cap$

$\mathbb{Q} := \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$

$\cap$ rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen

$\cap$

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

(später mehr)

Notiz (Prinzip der vollständigen Induktion)

Gilt für $M \subset \mathbb{N}$

$0 \in M$

und $(n \in M \Rightarrow n+1 \in M)$

so ist $M = \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ Tutorium

Konstruktionen mit Mengen

Auswahl von Teilmengen:

X Menge

$X' := \{x \in X \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$

X, Y Mengen, X_i Mengen $(i \in I)$

Durchschnitt

$X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y\}$

$\bigcap_{i \in I} X_i := \{x \mid \forall i \in I: \ x \in X_i\}$

für alle

Vereinigung:

$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ oder } x \in Y\}$

$\bigcup_{i \in I} X_i := \{x \mid \exists i \in I: \ x \in X_i\}$

es existiert

Komplement:

$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$

Abbildungen

2.1.3 Def: Eine Abbildung von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ ein eindeutiges Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Zwei Abbildungen

$$f: X \longrightarrow Y,$$
$$g: X' \longrightarrow Y'$$

sind gleich, wenn gilt:

$$X = X', \quad Y = Y' \text{ und}$$
$$\forall x \in X: \quad f(x) = g(x)$$

⚠ X (Quelle) & Y (Ziel) gehören immer dazu!

2.1.3 Def.:

Sei $f: \underset{\underset{M}{\cup}}{\overset{\overset{x}{\in}}{X}} \longrightarrow \underset{\underset{N}{\cup}}{\overset{\overset{y}{\in}}{Y}}$ eine Abb.

<u>das Bild von x:</u> $f(x) \in Y$

<u>das Bild von M:</u>

$$f(M) := (\{ f(x) \mid x \in M \})$$
$$= \{ y \in Y \mid \text{es gibt } m \in M: y = f(m) \}$$

<u>ein Urbild von y:</u> ein $x \in X$ mit $f(x) = y$

<u>die Faser von y:</u>

$$f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) = y \}$$

<u>das Urbild von N:</u>

$$f^{-1}(N) := \{ x \in X \mid f(x) \in N \}$$

(also $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$)

Die <u>Beschränkung</u> von f auf M ist die Abbildung

$$M \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

2.1.4 Def.: Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist

injektiv, falls $\forall x, x' \in X$: $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

jedes y hat höchstens ein Urbild

surjektiv, falls $\forall y \in Y$: $\exists x: f(x) = y$

jedes y hat mindestens ein Urbild

bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

jedes y hat genau ein Urbild

Ist $f: X \longrightarrow Y$ bijektiv, so ist die <u>Umkehrabbildung</u> f^{-1} gegeben durch

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto \text{das eindeutige Urbild } x \text{ von } y.$$
$$(f(x) = y)$$

2.1.4 Satz Sind X und Y endliche Mengen mit gleich vielen Elementen, so sind die folgenden Bedingungen an eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ äquivalent:

(i) f injektiv
(ii) f surjektiv
(iii) f bijektiv

2.1.5 Def: Die **Komposition** zweier Abbildungen $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ist gegeben durch

$$g \circ f : X \longrightarrow Z, \quad x \longmapsto g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Die **Identität** auf einer Menge X ist gegeben durch

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto x$$

2.1.5 Lemma: Komposition ist assoziativ. Das heißt, für

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

2.1.5 Lemma:

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

(1) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $X \longleftarrow Y : g$ mit $\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_X}$ gibt, oder wenn $X = \emptyset$.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $X \longleftarrow Y : g$ mit $\boxed{f \circ g = \mathrm{id}_Y}$ gibt.

(3) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $X \leftarrow Y : g$ gibt mit $\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_X}$ und $\boxed{f \circ g = \mathrm{id}_Y}$.

In diesem Fall ist $g = f^{-1}$.